

السلام
الرحمن

مدل‌های ریاضی

مشتقات مالی

جلد دوم

مؤلف:

یو-کون کویک

مترجم:

دکتر عبدالساده نیسی

دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه علامه طباطبائی

مہتاب مہرآسا



انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس
دفتر: تهران، خیابان حافظ، نرسیده به جمهوری، بن‌بست ازهری،
شماره ۱۰، تلفن: ۶۴۰۸۴۰۰۰
نمایشگاه و فروشگاه: تهران، میدان ونک، خیابان ملاصدرا، شماره ۲۵،
تلفن: ۸۸۶۴۸۱۹۲، دورنگار: ۸۸۶۴۸۱۹۶
تارنمای انتشارات: www.boursepub.ir
رایانامه: info@boursepub.ir

مدل‌های ریاضی مشتقات مالی - جلد دوم

- تألیف: یو-کون کویک
- ترجمه: دکتر عبدالساده نیسی و مهتاب مهرآسا
- ناشر: انتشارات بورس وابسته به شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس
- ویراستار:
- صفحه‌آرا:
- طراح جلد:
- چاپ:؛
- قیمت: ریال
- شمارگان: نسخه
- چاپ و صحافی:
- شابک:

همه حقوق محفوظ و متعلق به ناشر است.

فهرست مطالب

سخن ناشر	۱
پیشگفتار مترجمان	۳
فصل پنجم: اختیار معاملات امریکایی	۵
اختیار معاملات امریکایی	۷
۱-۵ توصیف مرزهای بهینه اعمال	۱۰
۱-۱-۵. اختیار معاملات امریکایی که دارایی پایه آن‌ها دارای سود نقدی است.	۱۲
۱-۱-۵. ۲. شرط تماس	۱۴
۱-۱-۵. ۳. مرز بهینه اعمال برای اختیار خرید امریکایی	۱۶
۱-۱-۵. ۴. روابط تقارن فروش-خرید	۲۲
۱-۱-۵. ۵. اختیار خریدهای امریکایی مربوط به دارایی با یک سود نقدی	۲۶
۱-۱-۵. ۶. اختیار فروش امریکایی با یک سود تقسیمی و چند سود تقسیمی	۳۴
۲-۵. فرمولاسیون قیمت‌گذاری مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله امریکایی	۳۹
۱-۲-۵. ۱. فرمولاسیون مکمل خطی	۴۰
۲-۲-۵. ۲. مسئله توقف بهینه	۴۲
۳-۲-۵. ۳. شکل انتگرالی پرمیوم اعمال زود هنگام	۴۵
۴-۲-۵. ۴. اختیار معاملات آستانه‌ای امریکایی	۵۱
۵-۲-۵. ۵. اختیارهای پس‌نگر امریکایی	۵۴
۳-۵. ۳. روش‌های تقریب تحلیلی	۵۷
۱-۳-۵. ۱. روش تقریب اختیار ترکیبی	۵۹
۲-۳-۵. ۲. حل عددی معادله انتگرال	۶۱

ب □ مفاهیم مقدماتی و ارزش گذاری اوراق مشتقه - جلد دوم

۳-۳-۵	روش تقریب درجه دو.....	۶۴
۴-۵	اختیار معامله دارای حق تنظیم مجدد اختیاری.....	۶۷
۱-۴-۵	ارزش گذاری تثبیت کف	۷۰
۲-۴-۵	اختیار فروش های با قیمت توافقی قابل تغییر.....	۷۴
۵-۵	مسائل	۸۱

فصل ششم: طرح های عددی برای قیمت گذاری اختیارات..... ۱۰۳

طرح های عددی برای قیمت گذاری اختیارات..... ۱۰۵

۱-۶	روش های درخت مشبک.....	۱۰۸
۱-۱-۶	نگاهی دوباره به مدل دوجمله ای.....	۱۰۹
۲-۱-۶	حدهای پیوسته مدل دوجمله ای.....	۱۱۱
۳-۱-۶	مدل های مربوط به سود نقدی گسسته.....	۱۱۵
۴-۱-۶	اعمال زود هنگام و قابلیت باز خرید.....	۱۱۸
۵-۱-۶	روش های سه جمله ای.....	۱۲۱
۶-۱-۶	روش های شبکه ای پرتاب رو به جلو.....	۱۲۶
۲-۶	الگوریتم های تفاضل محدود.....	۱۳۶
۱-۲-۶	ساختن روش های صریح.....	۱۳۷
۲-۲-۶	روش های ضمنی و موضوعات مربوط به پیاده سازی آنها.....	۱۴۳
۳-۲-۶	روش تثبیت مرز و تکنیک واهلش نقطه.....	۱۴۷
۴-۲-۶	خطای برش و مرتبه هم گرایی.....	۱۵۳
۵-۲-۶	پایداری عددی و پدیده های نوسان.....	۱۵۶
۶-۲-۶	تقریب عددی شرایط کمکی.....	۱۶۰
۳-۶	شبیه سازی مونت کارلو.....	۱۶۵
۱-۳-۶	تکنیک های کاهش واریانس.....	۱۶۹
۲-۳-۶	دنباله های با اختلاف کم.....	۱۷۳
۳-۳-۶	ارزش گذاری اختیار معاملات امریکایی.....	۱۷۵
۴-۶	مسائل	۱۹۲

فصل هفتم: مدل های نرخ بهره و قیمت گذاری اوراق قرضه..... ۲۰۵

مدل های نرخ بهره و قیمت گذاری اوراق قرضه..... ۲۰۷

فهرست مطالب □ ج

۲۱۰.....	۱-۷. اوراق قرضه و نرخ‌های بهره
۲۱۱.....	۱-۱-۷. اوراق قرضه و منحنی‌های سود
۲۱۳.....	۲-۱-۷. قرارداد نرخ سلف، سلف اوراق قرضه و سواپ متعارف
۲۱۷.....	۳-۱-۷. نرخ‌های سلف و نرخ‌های کوتاه‌مدت
۲۲۱.....	۴-۱-۷. قرضه تحت نرخ‌های بهره معین (قطعی).....
۲۲۲.....	۲-۷. مدل‌های تک‌عاملی نرخ کوتاه‌مدت.....
۲۲۳.....	۱-۲-۷. مدل‌های نرخ کوتاه‌مدت و قرضه.....
۲۲۹.....	۲-۲-۷. مدل بازگشت به میانگین ویسچک
۲۳۲.....	۳-۲-۷. مدل انتشار ریشه دوم کاکس-اینگرسل-راس
۲۳۴.....	۴-۲-۷. مدل‌های نرخ کوتاه‌مدت تک‌عاملی تعمیم یافته
۲۳۶.....	۵-۲-۷. تنظیم توابع پارامتری با استفاده از ساختار زمانی قرضه
۲۴۱.....	۳-۷. مدل‌های نرخ بهره چندعاملی.....
۲۴۲.....	۱-۳-۷. مدل‌های نرخ کوتاه‌مدت/نرخ بلندمدت.....
۲۴۶.....	۲-۳-۷. مدل‌های نوسان تصادفی.....
۲۴۷.....	۳-۳-۷. مدل‌های ساختار زمانی مستوی
۲۵۲.....	۴-۷. چهارچوب هیت-جاررو-مورتون
۲۵۴.....	۱-۴-۷. شرط رانش نرخ سلف
۲۵۶.....	۲-۴-۷. فرایندهای نرخ کوتاه‌مدت و ویژگی‌های مارکوفی آن‌ها
۲۶۱.....	۳-۴-۷. فرایندهای لایبور سلف تحت چهارچوب HJM گوسی
۲۶۴.....	۵-۷. مسائل

فصل هشتم: مشتقات نرخ بهره: اختیار معاملات اوراق قرضه، ابزارهای لایبور و سواپ ۲۸۹..

۲۹۱.....	مشتقات نرخ بهره: اختیار معاملات اوراق قرضه، ابزارهای لایبور و سواپ
۲۹۵.....	۱-۸. معیار سلف و تغییرات سلف
۲۹۶.....	۱-۱-۸. معیار سلف
۲۹۹.....	۲-۱-۸. قیمت‌گذاری اختیار معاملات سهام تحت نرخ‌های بهره تصادفی.....
۳۰۱.....	۳-۱-۸. فرایند قرارداد آتی و شکاف قیمت آتی-سلف.....
۳۰۴.....	۲-۸. اختیار معاملات اوراق قرضه و اوراق دامن‌دار
۳۰۵.....	۱-۲-۸. اختیار معاملات قرضه‌های تخفیفی و قرضه‌های دارای کوپن
۳۱۴.....	۲-۲-۸. قرضه‌های دامن‌دار

د □ مفاهیم مقدماتی و ارزش گذاری اوراق مشتقه - جلد دوم

۳۱۹.....	۳-۸. سقف های نرخ بهره و مدل های بازار لایبور
۳۲۰.....	۱-۳-۸. قیمت گذاری سقف ها تحت چهارچوب HJM گوسی
۳۲۲.....	۲-۳-۸. فرمول های بلک و مدل های بازار لایبور
۳۳۰.....	۴-۸. ابزارهای سوآپ و سوآپشن ها
۳۳۱.....	۱-۴-۸. نرخ های سوآپ سلف و معیار سوآپ
۳۳۷.....	۲-۴-۸. قیمت گذاری تقریبی سوآپشن تحت مدل بازار لایبور لاگ نرمال
۳۴۲.....	۳-۴-۸. سوآپ های ارز متقابل
۳۵۳.....	۵-۸. مسائل

فهرست شکل‌ها

- شکل شماره ۵-۱. منحنی توپر نشان‌دهنده تابع قیمت $C(S, T)$ یک اختیار خرید امریکایی مربوط به یک دارایی است که به صورت پیوسته سود نقدی پرداخت می‌کند. ۱۲
- شکل شماره ۵-۲. یک اختیار خرید امریکایی که دارایی پایه آن سود تقسیمی پیوسته پرداخت می‌کند، ۱۴
- شکل شماره ۵-۳. منحنی توپر نشان‌دهنده تابع قیمت یک اختیار فروش امریکایی در یک زمان باقی‌مانده مشخص تا سررسید است ۲۳
- شکل شماره ۵-۴. برای $S_D^* > S_D^-$ ، هنگامی که L_I در طرف چپ خط مرز پایین $L_2 : B = S_D^- - D$ قرار می‌گیرد، منحنی قیمت اختیار خرید اروپایی $V = C(S_D^- - D, T_D^+)$ ، $XE^{-R(T-TD)}$ پایین‌تر از خط بازده اعمال $L_I : E = S_D^- - X$ باقی می‌ماند. ۳۰
- شکل شماره ۵-۵. نمودار مرز بهینه اعمال $S^*(T)$ به صورت تابعی از T ، برای اختیار فروش امریکایی با یک بار پرداخت سود نقدی ۳۵
- شکل شماره ۵-۶. توصیف مرز بهینه اعمال $S^*(T)$ به صورت تابعی از زمان تقویمی T برای یک مدل اختیار فروش امریکایی با سه بار پرداخت سود نقدی. ۳۶
- شکل شماره ۵-۷. این منحنی قیمت برای اختیار خرید کاهش و ابطال امریکایی با یک سطح آستانه‌ای پایین‌تر B_{LOW} همواره بالاتر از منحنی قیمت اختیار مشابه با یک سطح آستانه‌ای بالاتر B_{HIGH} است. ۵۴
- شکل شماره ۵-۸. ویژگی‌های تابع $E^{QT}P^*(T)$ تحت حالت‌های (۱) $R \leq Q$ ، (۲) $R > Q$ ۷۳
- شکل شماره ۵-۹. منحنی قیمت اختیار فروش با قیمت توافقی قابل تغییر، در $S = S^*(T)$ با خط نشان‌دهنده ارزش اختیار فروش بی‌تفاوت مماس می‌شود. ۷۴
- شکل شماره ۵-۱۰. نمودار مرز تغییر بهینه $S^*(T)$ مربوط به اختیار فروش با قیمت توافقی متغیر بر حسب T ۷۹

- شکل شماره ۶-۱. درخت دوجمله‌ای با یک سود نقدی گسسته ۱۱۶
- شکل شماره ۶-۲. ساختن یک درخت دوجمله‌ای با یک سود نقدی گسسته D ، $N=4$ و $K=2$ ۱۱۸
- شکل شماره ۶-۳. نمودار شماتیکی که ایجاد تابع گرید $G_{CUM}(K,J)$ که وابستگی به مسیر ویژگی پارسیسی تجمعی را مدل سازی می کند را نشان می دهد. ... ۱۳۰
- شکل شماره ۶-۴. شبکه تفاضل محدود با طول گام یکنواخت ΔX و گام زمانی ΔT ۱۳۸
- شکل شماره ۶-۵. دامنه وابستگی یک روش سه جمله‌ای با N گام زمانی، به زمان باقی مانده تا سررسید. ... ۱۴۱
- شکل شماره ۶-۶. نوسانات کاذب در جواب عددی قیمت اختیار. ... ۱۵۷
- شکل شماره ۶-۷. یک درخت شبیه سازی با سه شاخه و دو گام زمانی. ... ۱۸۳
- شکل شماره ۷-۱. نمودار طیف تخفیفی با سررسیدهای پس از زمان T_0 ۲۱۲
- شکل شماره ۷-۲. سیر تغییرات قیمت یک تخفیفی با سررسیدهای ثابت T_0 ۲۱۲
- شکل شماره ۷-۳. زمان بندی جریان نقدی یک قرارداد نرخ سلف. ... ۲۱۴
- شکل شماره ۷-۴. جریان نقدی یک سواپ نرخ بهره. ... ۲۱۷
- شکل شماره ۸-۱. تاریخ های پرداخت کوپن و روز شماری بین تاریخ های پرداخت کوپن. ... ۳۱۵
- شکل شماره ۸-۲. یک مدیر دارایی از سواپ تفاضلی برای بالا بردن بازده یک سرمایه گذاری دلاری کم درآمد استفاده می کند. ... ۳۴۳
- شکل شماره ۸-۳. ارتباط های بین معیارهای سلف در ارز داخلی و خارجی. ... ۳۵۱

سخن ناشر

«طولانی‌ترین راه‌ها با نخستین گام‌ها آغاز می‌شوند»؛ گرچه این سخن درست است، اما در تولید محتوای علمی و انتقال دانش، کسی نخستین گام‌ها را به خاطر ندارد و همچنین در این راه، به درستی نمی‌توان از نقطه آغاز سفر سخن گفت و خط سیر و منزلگاه‌های آن را با نشانه‌هایی معین نمایان ساخت. براین اساس، در حال حاضر نکته شایان توجه یافتن راهکارها و کنشگرانی است که با تولید، نشر و انتقال یافته‌ها و تجربیات افراد صاحب‌نظر، گامی هرچند کوچک، در راستای گسترش و به اشتراک گذاشتن دانش و آگاهی در قالب یک محصول فرهنگی دارند.

با گسترش بازارهای مالی و با توجه به نیاز روزافزون طیف وسیعی از دانشجویان و پژوهشگران رشته‌های مختلف از جمله علم اقتصاد، مدیران، مشاوران سرمایه‌گذاری، سرمایه‌گذاران و نیز علاقمندان به موضوعات بازار سرمایه و همچنین فراگیر شدن این بازار در میان آحاد جامعه، آموزش عمومی و تخصصی در حوزه بازارهای مالی بیش از پیش اهمیت یافته است. در این راستا، انتشارات بورس با هدف گسترش فرهنگ سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مالی، توسط شرکت اطلاع‌رسانی و خدمات بورس تاسیس شد. این انتشارات در شهریور ۱۳۹۰ مجوز خود را از وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی

دریافت کرد و با برداشتن نخستین گام‌های خود و انتشار کتاب‌های حوزه مالی با تأکید بر مباحث بازار سرمایه وارد عرصه تولید و نشر دانش و آگاهی شد.

انتشارات بورس «مرجعیت در انتشار کتاب‌های مالی در سطح کشور و منطقه» را چشم‌انداز خود قرار داده است؛ و براساس نشست‌های متعدد کارشناسی، انتشار کتاب با محوریت‌های حقوق در بازار سرمایه، فناوری اطلاعات در بازار سرمایه، مالی اسلامی و مالی عمومی را در اولویت نخست خود قرار داده است و چندین کتاب را نیز با محوریت‌های حسابداری و حسابرسی در بازار سرمایه، اقتصاد مالی و همچنین موضوعات بین‌رشته‌ای مرتبط با بازار سرمایه را به عنوان اولویت بعدی خود، روانه بازار کرده است.

انتشارات بورس افزون بر چاپ و نشر کتاب‌هایی که از سوی سازمان بورس و اوراق بهادار، پژوهشگران، نگارندگان و برگردانندگان معرفی می‌شوند، اقدام به نشر بولتن‌ها، فصلنامه‌های سازمان بورس و نیز محصولات نرم‌افزاری همچون دی وی دی حاوی متن کتاب، کتاب گویا و فلش کارت نیز کرده است. از جمله دیگر اقدامات این انتشارات، می‌توان به مجموعه «کندو» اشاره کرد؛ مجموعه کندو با رویکرد آموزش، فرهنگ‌سازی و ارتقای سطح سواد و هوش مالی گروه کودک و نوجوان ایجاد شده است.

انتشارات بورس در مدت زمان فعالیت کوتاه خود، موفق به انتشار ۱۲۰ عنوان شده است. این آثار به زبان فارسی و انگلیسی در حوزه‌های مرجع، تخصصی_دانشگاهی، عمومی و کودک در زمینه دستاوردهای روز بازار سرمایه در ایران و جهان و همچنین آموزش‌های عمومی و تخصصی در حوزه بازار سرمایه مشتمل بر کتب دانشگاهی در حوزه بازار سرمایه، کتب آموزشی با هدف پاسخگویی به نیاز عموم جامعه و انتشار برخی از منابع آزمون‌های بازار سرمایه است.

پیش‌گفتار مترجمان

خداوند بزرگ را سپاس می‌گوییم که باز این فرصت را به ما داد تا بتوانیم یک اثر بسیار مفید از سری کتاب‌های مدل‌سازی بازارهای مالی به چاپ برسانیم. این کتاب پس از مطالعه تیم تحقیقاتی «هسته مطالعات مدل‌های بازارهای مالی» به حمایت معاونت پژوهشی دانشگاه علامه طباطبائی در مورد نیازهای دانشجویان و محققین رشته‌های ریاضیات مالی، مهندسی مالی و اقتصاد مالی در حوزه مدل‌سازی ترجمه شده و پس از تدریس حدود یک دهه در دوره تحصیلات تکمیلی دانشگاه‌ها و بازارهای مالی به مرحله چاپ رسیده است. کتاب حاضر می‌تواند مرجع بسیار کامل و مناسب برای اساتید، دانشجویان و محققین ریاضیات کاربردی و بازارهای مالی باشد. در این کتاب کاربرد ریاضیات در مالی به طور مفصل بیان شده است، علاوه بر این نیاز محققین و بازارهای مالی در حوزه ریاضیات و مدل‌سازی را بر طرف می‌کند. کتاب پیش رو همون‌گونه که در ادامه توضیح داده می‌شود مرجع مناسبی برای دروس دانشگاهی، مهندسی مالی، ریاضی مالی (مقدماتی و پیشرفته) و روشهای عددی در مالی می‌باشد. مطالعه این کتاب برای تمام رشته‌های مرتبط به مالی و محققین رشته‌هایی از ریاضی که علاقه‌مند به پژوهش در حوزه مالی می‌باشند توصیه می‌شود.

کتاب حاضر دو جلد می‌باشد که جلد دوم مشتمل بر چهار فصل است، پس از مطالعه مفاهیم مالی مربوط به بازارهای مشتقات مالی و مدل‌سازی آنها، در فصل پنجم

از جلد دوم اختیار معاملات امریکایی تشریح می شود، در این فصل علاوه بر مفهوم و کاربردهای اختیارات امریکایی، به مدل سازی و حل انواع اختیارات امریکایی پرداخته شده است، در این فصل بیان می شود که مسایل مقدار مرزی با کران آزاد چگونه این ابزار مالی را مدل سازی می کند، این فصل به دلیل پیچیدگی و کاربردهای فراوان می تواند پیش نیازی برای تعریف پژوهش های نوین در حوزه مالی باشد. در فصل ششم از جلد دوم روش های عددی حل مدل های مالی گفته شده تشریح می شود، این فصل مرجع کاملی برای روش های عددی در مالی می باشد، به دلیل این که اکثر مدل های نوین مالی دارای جواب بسته یا همان جواب تحلیلی نیستند، مطالعه و یادگیری این فصل برای تمام پژوهشگران بازارهای مالی لازم می باشد، فصل های هفتم و هشتم جلد دوم در مورد مشتقات نرخ بهره و قیمت گذاری اوراق قرضه می باشند، این فصل ها مرجع مناسبی برای ریاضی مالی دو یا ریاضی مالی پیشرفته می باشند در این فصل ها مدل های پویای تصادفی نرخ های بهره و مشتقات آنها تشریح می شود، مهم ترین مطلبی که در فصل سوم گفته می شود مدل سازی و روش های حل اوراق قرضه تحت نرخ های بهره تصادفی می باشد.

در پایان از تمام عزیزانی که کتاب را مطالعه می کنند تقاضا می شود نظرات انتقادی و اصلاحی خود را به مترجمین ارسال نمایند. یقیناً هر نوشته ای بدون نقص نیست و این نوشته نیز مستثنی نمی باشد، بنابراین پیشنهادهای شما حتماً در چاپ های بعدی لحاظ خواهد شد. در اینجا بر خود لازم می دانیم از سازمان بورس اوراق بهادار که تمام حمایت های لازم برای چاپ این کتاب داشته اند کمال تشکر را دارم، از جناب آقای اسماعیل پور که با راهنمایی و درایت ایشان کمک فراوانی به چاپ این کتاب نموده اند تشکر و قدردانی می کنم، همچنین از تمام عزیزان انتشارات بورس اوراق بهادار که در چاپ کتاب همکاری کرده اند تشکر و قدردانی می کنم.

مehتاب مهرآسا
کارشناس بانک ملت

دکتر عبدالساده نیسی
دانشیار دانشگاه علامه طباطبائی

ایمیل: a_neisy@stu.ac.ir

فصل پنجم
اختیار معاملات امریکایی

اختیار معاملات امریکایی

ویژگی مشخصه یک اختیار معامله امریکایی، رایج بودن اعمال زودهنگام آن است. به این معنی که دارنده آن می‌تواند اختیار را پیش از تاریخ انقضای آن اعمال کند. چون برای دارنده اختیار امریکایی، حق اعمال پیش از سررسید اختیار در نظر گرفته شده است، این حق نمی‌تواند فاقد ارزش باشد؛ بنابراین، انتظار داریم که یک اختیار امریکایی، نسبت به اختیار اروپایی متناظر خود گران‌تر باشد. پرمیوم اضافه را پرمیوم اعمال زودهنگام می‌نامند.

ابتدا برخی از جنبه‌های قیمت‌گذاری اختیارهای امریکایی را که در بخش ۱-۲ مورد بحث قرار گرفت یادآوری می‌کنیم. اعمال پیش از سررسید اختیار خرید یا اختیار فروش امریکایی به از دست رفتن ارزش بیمه‌ای مرتبط با نگهداری اختیار می‌شود. دارنده یک اختیار امریکایی از سودهای نقدی کسب شده به وسیله دارایی منتفع می‌شود ولی در مورد ارزش زمانی قیمت توافقی متضرر می‌شود. اگر دارایی که با استفاده از اعمال زودهنگام دریافت شده است دارایی سود نقدی نباشد، اعمال پیش از سررسید اختیار امریکایی مزیتی ندارد. هنگامی که دارایی پایه دارایی سود نقدی نباشد، حق اعمال پیش از موعد اختیار بی‌ارزش خواهد بود، بنابراین در این حالت اختیار خرید امریکایی دارایی ارزش برابر با اختیار خرید اروپایی مشابه است. علاوه بر این، با

استفاده از بحث برتری (غالب بودن) نشان دادیم که ارزش یک اختیار امریکایی حداقل باید برابر با ارزش ذاتی آن باشد یعنی باید ارزش اختیار خرید برابر $\max(S - X, 0)$ و ارزش اختیار فروش برابر با $\max(X - S, 0)$ باشد که S و X به ترتیب قیمت دارایی و قیمت توافقی هستند. با وجود اینکه رابطه زوج اختیار خرید-اختیار فروش برای اختیار معاملات اروپایی وجود دارد، برای اختیارهای امریکایی فقط می توانیم کران های بالا و پایین را از تفاوت ارزش اختیار خرید و اختیار فروش به دست بیاوریم.

هنگامی که دارایی پایه دارای سود نقدی باشد، ممکن است اعمال پیش از سررسید اختیار هنگامی که قیمت دارایی S به یک مقدار بحرانی برسد، برای دارنده اختیار امریکایی بهینه باشد که به این مقدار قیمت بهینه اعمال می گویند. چون مقدار زیان مربوط به ارزش بیمه ای و ارزش زمانی قیمت توافقی دارایی وابستگی به زمان هستند، قیمت بهینه اعمال، به زمان باقی مانده تا سررسید بستگی دارد. برای یک اختیار خرید امریکایی با عمر طولانی تر، ارزش بیمه ای مرتبط با نگهداری اختیار خرید امریکایی و ارزش زمانی قیمت توافقی دارای مقادیر بالاتر هستند؛ بنابراین، باید مقدار بالاتری برای قیمت بهینه اعمال فرض کرد به طوری که احتمال پشیمانی از اعمال زودهنگام کاهش یابد و مقدار سود نقدی دریافت شده به خاطر نگهداری دارایی بزرگ تر باشد. هنگامی که دارایی پایه به طور پیوسته عایدات نقدی پرداخت می کند، مجموعه این بهینه اعمال برای همه زمان ها، یک منحنی پیوسته تشکیل می دهند که به مرز بهینه اعمال معروف است. برای یک اختیار فروش امریکایی، اعمال زودهنگام، به سود ناشی از ارزش زمانی قیمت توافقی می انجامد؛ بنابراین، هنگامی که نرخ بهره بدون ریسک مثبت است، همواره یک قیمت بهینه اعمال وجود دارد که در مقادیر پایین تر از آن، اعمال پیش از سررسید اختیار فروش امریکایی بهینه می شود.

مرز بهینه اعمال یک اختیار امریکایی از ابتدا معلوم نیست، بلکه باید در حین حل مدل قیمت گذاری تعیین شود. چون مرز دامنه ای یک مدل اختیار امریکایی یک مرز آزاد

است، مسئله قیمت‌گذاری، یک مسئله مقدار مرزی آزاد را تشکیل می‌دهد. در بخش ۵-۱ به توصیف مرز بهینه اعمال برای حالتی که زمان باقی‌مانده تا سررسید نامحدود است و همچنین برای لحظه پیش از انقضا می‌پردازیم. شرط بهینگی را به صورت شرط تماس منحنی ارزش اختیار با خط قیمت ذاتی به دست بیاوریم. هنگامی که دارای پایه به صورت گسسته سود نقدی پرداخت می‌کند، اعمال پیش از سررسید اختیار خرید امریکایی ممکن است تنها در زمانی دقیقاً پیش از یک تاریخ پرداخت سود بهینه شود. چون سیاست اعمال زود هنگام نسبتاً ساده خواهد بود، قادر خواهیم بود تا فرم بسته فرمول‌های قیمت را برای اختیار خریدهای امریکایی استخراج کنیم که مربوط به دارایی هستند که به طور گسسته سود نقدی پرداخت می‌کند. همچنین سیاست‌های بهینه اعمال را برای اختیار فروش‌های امریکایی که مربوط به دارایی‌هایی هستند که سود نقدی گسسته پرداخت می‌کنند نیز مورد بحث قرار می‌دهیم.

در بخش ۵-۲ دو فرمولاسیون قیمت‌گذاری برای اختیار معاملات امریکایی یعنی فرمولاسیون مکمل و فرمولاسیون توقف بهینه را ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم که چگونه پرمیوم اعمال زود هنگام را می‌توان برحسب مرز اعمال و به صورت انتگرالی بیان کرد و نحوه ارتباط تعیین مرز بهینه اعمال با جواب معادله انتگرالی را بررسی می‌کنیم. پرمیوم اعمال زود هنگام را می‌توان به صورت وجه جبرانی تفسیر کرد که به‌خاطر به تأخیر انداختن حق اعمال زود هنگام دارنده اختیار به او پرداخت می‌شود و در غیر این صورت اعمال پیش از سررسید اختیار برای او بهینه بود. ویژگی اعمال پیش از موعد را می‌توان با سایر جنبه‌های وابسته به مسیر قرارداد اختیار ترکیب کرد. ما اثر آستانه روی سیاست‌های اعمال زود هنگام اختیارهای آستانه‌دار امریکایی را بررسی می‌کنیم. همچنین فرمول تحلیلی قیمت را برای اختیار روسی که اساساً یک اختیار پس‌نگر امریکایی مادام‌العمر است به دست می‌آوریم.

به صورت کلی فرمول‌های تحلیلی قیمت برای اختیارهای امریکایی به‌جز برای تعداد

خاص و محدودی از این اختیارها قابل دستیابی نیستند. در بخش ۳-۵ روش های تقریب تحلیلی متعددی برای قیمت گذاری اختیارهای امریکایی ارائه می دهیم. یک روش تقریب این است که امکان اعمال را محدود کنیم به طوری که اختیار امریکایی تنها در تعداد محدودی از مقاطع زمانی قابل اعمال باشد. روش دیگر، حل معادله انتگرالی مرز اعمال با استفاده از یک روش انتگرال گیری بازگشتی است. سومین روش که روش تقریب درجه دو نامیده می شود، بر اساس ساده سازی معادله بلک-شولز به یک معادله دیفرانسیل عادی استوار است به طوری که ردیابی تحلیلی را افزایش می دهد.

به مدل درآوردن یک ابزار مشتقه مالی که حق تنظیم مجدد شرایط مشخصی را در قرارداد پیش بینی کرده است، همچون حق تغییر قیمت توافقی به قیمت رایج دارایی، یک مسئله مقدار مرزی آزاد را نیز تشکیل می دهد. در بخش ۴-۵ مدل قیمت گذاری را برای اختیار فروش با قیمت توافقی تغییر یافته تشکیل می دهیم و استراتژی تنظیم مجدد بهینه که دارنده اختیار برای خود برمیگزیند را بررسی می کنیم. در حالی که تنها یک بار می توان اختیار امریکایی را اعمال کرد، ممکن است تغییر شرایط آن برای دفعات متعدد مجاز باشد. همچنین رفتار قیمت گذاری اختیار فروش های دارای امکان تنظیم مکرر را مورد بررسی قرار می دهیم. جالب اینکه هنگامی که حق تنظیم مجدد برای دفعات نامحدود مجاز دانسته می شود، این اختیار فروش به یک اختیار پس نگر اروپایی تبدیل می شود.

۵-۱ توصیف مرزهای بهینه اعمال

سیاست های اعمال زود هنگام بهینه اختیار معاملات امریکایی به طور اساسی به پرداخت یا عدم پرداخت سود نقدی به وسیله دارایی بستگی دارد (گسسته یا پیوسته). در طول بحث حاضر فرض می کنیم که مقدار و زمان پرداخت سود نقدی را از قبل می دانیم. در این بخش تحلیل های کمی راجع به ویژگی های مرز اعمال زود هنگام را به تفصیل ارائه می دهیم. نشان می دهیم که مرز اعمال بهینه یک اختیار فروش امریکایی

با عایدات نقدی پیوسته یا با عایدات نقدی صفر، تابعی پیوسته و نزولی از زمان انقضا یعنی t است. با این حال، مرز بهینه اعمال برای یک اختیار فروش امریکایی مربوط به دارایی که سودهای نقدی گسسته پرداخت می‌کند، ممکن است بسته به اندازه پرداخت‌های نقدی گسسته، دارای ناپیوستگی جهشی باشد یا فاقد چنین جهش‌هایی باشد. در مورد اختیار خرید امریکایی که دارایی پایه آن دارای سود نقدی پیوسته است، توضیح می‌دهیم که چرا اعمال آن در مقادیری از K که به اندازه کافی بزرگ هستند بهینه می‌شود. مرز بهینه اعمال مربوط، تابعی صعودی و پیوسته از t است. زمانی که دارایی پایه یک اختیار خرید امریکایی سودهای نقدی گسسته پرداخت می‌کند، اعمال زود هنگام بهینه اختیار خرید ممکن است تنها در مقاطع زمانی پیش از آنکه سهام‌داران مشمول سود دارایی شناسایی شوند^۱ اتفاق بیفتد. شرایط متعدد دیگری برای بهینه بودن اعمال پیش از موعد لازم است از جمله اینکه: (۱) سود نقدی نسبت به قیمت توافقی به اندازه کافی بزرگ باشد؛ (۲) تاریخ شناسایی سهام‌داران مشمول سود به میزان مناسبی به انقضا نزدیک باشد و (۳) سطح قیمت دارایی پیش از تاریخ سود تقسیمی از مقادیر آستان‌های خاصی بالاتر باشد. چون حالات ممکن اعمال زود هنگام محدود به تعداد کمی از تاریخ‌های گسسته پرداخت سود هستند، فرمول قیمت یک اختیار خرید امریکایی که دارایی پایه آن سودهای نقدی گسسته مشخصی پرداخت می‌کند را می‌توان با مرتبط کردن اختیار خرید امریکایی به یک اختیار اروپایی ترکیبی به دست بیاورد.

شرایط کمکی در مدل قیمت‌گذاری شامل شرط تطبیق و شرط تماس ارزش اختیار امریکایی با مرز بهینه اعمال می‌باشد. شرط تماس نتیجه‌ای است که از ماکزیمم کردن ارزش اختیار امریکایی در میان همه سیاست‌های ممکن برای اعمال زود هنگام به دست می‌آید (بخش ۵-۱-۲ را ببینید).

1. ex-dividend