



دانشگاه علامه طباطبائی

# محاسبات عددی

در علوم و مهندسی

تألیف:

**دکتر عبدالساده نیسی**

عضو هیأت علمی دانشگاه علامه طباطبائی

**دکتر علی ذاکری**

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

**ویراستار: لیدا فرخو**



تقدیم به

مادر عزیز

و

پدر بزرگوارم

روحشان شاد

دکتر عبدالساده نیسی

تقدیم به

همسر عزیزم،

عرفان و نگین فرزندانم

دکتر علی ذاکری

## بسم الله الرحمن الرحيم

### پیشگفتار مؤلفان

خداوند بزرگ و منان را سپاس که عنایت او سبب گردید تا اثر دیگری به مرحله چاپ برسد. این کتاب از یادداشت‌های درسی ارائه شده در طی سال‌ها تدریس در دوره‌های کارشناسی رشته‌های علوم و فنی و مهندسی، استنتاج گردیده است.

مطالب و سرفصل دروس کتاب براساس سرفصل‌های جدید مصوب شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای رشته‌های علوم و فنی و مهندسی تدوین شده است. همچنین محتوای آن به عنوان یک مرجع مفید برای مهندسين و محققينی که به روش‌های عددی برای حل مسایل گوناگون نیاز دارند، سودمند می‌باشد.

شایان ذکر است که برخی مطالب مفید جهت تکمیل اطلاعات خوانندگان علاقمند به موضوع-های پژوهشی و تحقیقاتی، در این کتاب گنجانده شده، که با واژه‌ی «اختیاری» متمایز شده‌اند. هدف عمده‌ی مؤلفین در تدوین کتاب، ارائه‌ی روش‌های عددی متداول برای حل دسته‌ای از مسایل ریاضی است، که در علوم مهندسی کاربرد فراوانی داشته و حل آنها به کمک روش‌های تحلیلی پرهزینه، سخت یا امکان‌پذیر نیست.

در این کتاب ایده‌های جدیدی ارائه گردیده که از مقالات علمی منتشر شده در مجلات معتبر استخراج و در ضمن در کتاب‌های آنالیز عددی و محاسبات عددی کمتر به چشم می‌آیند. همچنین بحث خطا که در این کتاب تشریح شده است، براساس رایانه‌های جدید و قوانین جدید ذخیره در حافظه‌های رایانه بیان شده و بر این اساس کلیه‌ی محاسبات مربوطه انجام گرفته است. از ویژگی‌های مهم دیگر می‌توان به بحث خطای روش‌های عددی و احراز شرایط استفاده از آن روش در به‌دست آوردن جواب تقریبی مسئله اشاره نمود.

مؤلفین از پیشنهادات سازنده در جهت ارتقای علمی این کتاب استقبال نموده و در چاپ-های بعدی آن را لحاظ خواهند کرد. انتشار حل‌المسایل تحت هر عنوان بدون اجازه‌ی مؤلفین، مجاز نمی‌باشد.

در پایان مولفین از رهنمودهای داوران محترم جناب آقای دکتر جلیل رشیدی‌نیا، دکتر محمد جلوداری ممقانی و سرکار خانم لیدا فرخو کمال تشکر و قدردانی را دارند. از ویراستار محترم سرکار خانم فرخو سپاسگزاری می‌نماییم. از سرکار خانم تقوی طرفاوی که در تایپ و صفحه آرایی کتاب زحمات زیادی کشیده اند تشکر می‌نماییم.

بدون تردید انتشار این اثر بدون حمایت‌های ارزشمند معاونت پژوهشی دانشگاه، به‌خصوص زحمات ارزشمند همکاران عزیزمان در این معاونت از جمله جناب آقایان مهندس دنیوی و مهندس صابری میسر نبود.

امید است مطالعه‌ی این کتاب نظر صاحب‌نظران را جلب نموده و رضایت خوانندگان را فراهم سازد.

#### مؤلفین

دکتر عبدالساده نیسی\*      دکتر علی ذاکری\*\*

---

\* E-mail: a\_neisy@iust.ac.ir, a\_neisy@yahoo.com

\*\* E-mail: azakeri@kntu.ac.ir

## فهرست مطالب

عنوان	صفحه
<b>فصل اول</b>	
خطا.....	۱
۱. یادآوری چند مفهوم .....	۱
۲. خطاها در روش های عددی.....	۶
۲. ۱ منابع خطا .....	۷
۲. ۱. ۱ خطاهای دسته ی اول ( خطاهای ذاتی).....	۷
۲. ۱. ۲ خطاهای دسته ی دوم ( خطاهای محاسبات عددی) .....	۷
۲. ۲ خطای نمایش اعداد .....	۹
۲. ۲. ۱ حساب با ممیز شناور.....	۹
۲. ۲. ۲ کران اعداد اعشاری با ممیز ثابت یا شناور .....	۱۰
۲. ۲. ۳ خطای گرد کردن .....	۱۳
۲. ۲. ۴ خطای قطع کردن.....	۱۵
۲. ۳ سنجش خطا.....	۱۵
۲. ۴ خطای چهار عمل اصلی .....	۲۱
۲. ۵ انتشار خطا در توابع (خطای محاسبه ی تابع) .....	۲۵
۲. ۶ خطای محاسبه ی توابع (خطای بسط سری ها) .....	۲۹
۲. ۷ نقض قوانین حاکم بر عملیات ریاضی توسط اعداد حقیقی با ممیز شناور.....	۳۲
۳. تمرینات فصل اول .....	۳۴

## فصل دوم

روش‌های عددی حل معادلات غیر خطی.....	۳۹
۱. مقدمه‌ای بر روش‌های عددی حل یک معادله‌ی غیر خطی.....	۳۹
۲. روش تنصیف.....	۴۴
۳. روش خط قاطع یا نابجایی.....	۵۰
۴. روش نقطه‌ی ثابت.....	۵۳
۴.۱ مفهوم نقطه‌ی ثابت.....	۵۳
۴.۲ روش نقطه‌ی ثابت (تکرار ساده).....	۵۵
۴.۳ روش نقطه‌ی ثابت برای تقریب ریشه‌ی معادله.....	۵۹
۵. روش نیوتن - رافسون.....	۶۲
۶. روش وترى.....	۶۹
۷. سرعت همگرایی (مرتبه‌ی همگرایی یک روش تکراری).....	۷۱
۷.۱ مفهوم مرتبه‌ی همگرایی.....	۷۱
۷.۲ سرعت همگرایی روش نقطه‌ی ثابت.....	۷۲
۷.۳ مرتبه‌ی همگرایی روش نیوتن - رافسون.....	۷۳
۸. تمرینات فصل دوم.....	۷۴

## فصل سوم

روش‌های عددی حل دستگاه معادلات خطی.....	۸۵
۱. مروری بر جبر ماتریس‌ها.....	۸۵
۲. روش‌های مستقیم حل دستگاه معادلات خطی.....	۹۲
۲.۱ روش حذفی گاوس.....	۹۵

۲.۲	شکل ماتریسی روش حذفی گاوس	۱۰۱
۳.۲	شمارش اعمال جمع و ضرب در روش حذفی گاوس	۱۰۴
۴.۲	اشکالات روش حذفی گاوس	۱۰۶
۵.۲	روش تجزیه‌ی LU	۱۰۹
۶.۲	روش یافتن ماتریس‌های L و U	۱۱۱
۷.۲	روش تجزیه‌ی هاوس هولدر	۱۱۶
۳	روش‌های تکراری در حل دستگاه معادلات خطی	۱۲۱
۱.۳	معرفی روش‌های تکراری	۱۲۱
۲.۳	شرایط لازم و کافی برای همگرایی روش‌های تکراری	۱۲۹
۴	تمرینات فصل سوم	۱۳۱

## فصل چهارم

روش‌های عددی حل دستگاه معادلات غیر خطی	۱۳۹
۱. روش نقطه‌ی ثابت برای حل یک دستگاه معادلات غیر خطی	۱۳۹
۲. دستگاه معادلات غیر خطی شامل دومعادله و دومجهول	۱۴۶
۳. دستگاه معادلات غیر خطی شامل $n$ معادله و $n$ مجهول	۱۵۷
۴. تمرینات فصل چهارم	۱۶۵

## فصل پنجم

درون‌یابی	۱۶۹
۱. چندجمله‌ای تیلور	۱۷۰
۲. تقریب به روش چندجمله‌ای‌های درون‌یاب	۱۷۲
۳. تقریب لاگرانژ (چندجمله‌ای لاگرانژ)	۱۷۵



۴. تفاضلات تقسیم شده ی نیوتن.....	۱۸۱
۵. تفاضلات متناهی - نقاط متساوی الفاصله.....	۱۹۲
۵.۱ تفاضلات متناهی پیشروی نیوتن.....	۱۹۲
۵.۲ تفاضلات متناهی پسروی نیوتن.....	۱۹۸
۵.۳ تفاضلات متناهی مرکزی.....	۲۰۴
۶. درون یابی معکوس.....	۲۰۶
۷. برون یابی.....	۲۰۸
۸. مباحث تکمیلی در درون یابی.....	۲۰۹
۸.۱ (اختیاری) درون یابی اسپلاین.....	۲۱۳
۸.۱.۱ یک روش خاص در درون یابی اسپلاین.....	۲۱۴
۸.۲.۱ درون یابی به روش اسپلاین مکعبی.....	۲۲۲
۸.۲ درون یابی تابع جدولی با استفاده از اطلاعات بیشتر.....	۲۲۷
۸.۳ درون یابی کسری.....	۲۳۱
۸.۴ درون یابی در صفحه یا دومتغیره.....	۲۳۳
۹. تمرینات فصل پنجم.....	۲۴۱

## فصل ششم

برازش منحنی ها - روش کمینه ی مربعات.....	۲۵۳
۱. روش کمینه ی مربعات.....	۲۵۳
۲. تعمیم روش کمینه ی مربعات.....	۲۵۵
۳. چند تقریب کمینه ی مربعات - برازش داده های غیر خطی.....	۲۶۰
۳.۱ برازش نقاط با یک تابع نمایی.....	۲۶۰
۳.۲ برازش نقاط با یک تابع هذلولی.....	۲۶۲

۳.۳	برازش نقاط با یک تابع مثلثاتی	۲۶۵
۴	تمرینات فصل ششم	۲۶۶

## فصل هفتم

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی		۲۷۱
۱	مشتق گیری عددی	۲۷۱
۱.۱	محاسبه‌ی مشتق یک تابع جدولی از مراتب مختلف در نقاط دلخواه	۲۷۲
۲.۱	دستور سه نقطه‌ای برای محاسبه‌ی $f'$	۲۷۵
۳.۱	محاسبه‌ی مشتق تابع در نقاط متساوی الفاصله	۲۷۶
۴.۱	دستور مشتق گیری با استفاده از بسط تیلور	۲۷۸
۱.۴.۱	مشتق مرتبه‌ی اول	۲۷۸
۲.۴.۱	مشتق مرتبه‌ی دوم	۲۸۰
۵.۱	(اختیاری) مشتقات جزئی	۲۸۱
۲. انتگرال گیری عددی		۲۸۴
۱.۲	قاعده‌ی دوزنقه‌ای	۲۸۵
۲.۲	قاعده‌ی سیمپسون	۲۸۷
۳.۲	قاعده‌ی نقطه‌ی میانی	۲۸۸
۴.۲	انتگرال گیری با قاعده‌ی نیوتن - کاتس	۳۱۱
۵.۲	قاعده‌ی باز نیوتن - کاتس	۳۱۵
۶.۲	قواعد انتگرال گیری گاوس	۳۱۸
۷.۲	انتگرال رامبرگ	۳۲۱
۳	تمرینات فصل هفتم	۳۲۷

## فصل هشتم

روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی		۳۳۵
۱	مقدمه‌ای بر مسایل مقدار اولیه	۳۳۵

۳۳۷	۲. شرط خوش وضعی جواب مسئله‌ی مقدار اولیه .....
۳۴۰	۳. روش‌های عددی حل مسئله‌ی مقدار اولیه .....
۳۴۰	۳.۱ روش تیلور مرتبه‌ی $k$ .....
۳۴۵	۳.۲ روش اویلر اصلاح شده یا روش پیراسته‌ی اویلر .....
۳۴۷	۳.۳ روش‌های رونگه-کوتا .....
۳۴۷	۳.۳.۱ روش رونگه-کوتای مرتبه‌ی دوم .....
۳۵۲	۳.۳.۲ روش رونگه-کوتای مرتبه‌ی چهارم .....
۳۵۵	۴. روش‌های عددی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول .....
۳۵۵	۴.۱ روش رونگه-کوتای مرتبه‌ی دوم .....
۳۵۷	۵. تمرینات فصل هشتم .....
۳۶۳	منابع .....